

# 中學數學公式課的教學模式 案例分析

分享人： MET 薛晶

## 分享内容緣起

因式分解公式

$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$ , 其中  $q=ab$ , 且  $a+b=p$ .

## 用十字相乘法因式分解

### 知识回顾

- 1. 举例说明因式分解与整式乘法的关系
- 2. 我们已经学习了哪些因式分解的方法?
  - 提公因式法:  $ma+mb+mc=m(a+b+c)$
  - 运用公式法:  $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$   
 $a^2 \pm 2ab+b^2=(a \pm b)^2$

### 3. 把下列各式因式分解:

- $x^2 - y^2$
- $(y^2 + x^2)^2 - 4x^2y^2$
- $x^2 - 8x^2 + 16$
- $x^2 - x^2$
- $3ax^2 + 6ax + 3a$
- $2ax^2 + 6ax + 4a$

解: (1)  $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$   
 $= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$

(2)  $(y^2 + x^2)^2 - 4x^2y^2$   
 $= (y^2 + x^2 + 2xy)(y^2 + x^2 - 2xy)$   
 $= (x+y)^2(x-y)^2$

(3)  $x^2 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$   
 $= (x+2)^2(x-2)^2$

(4)  $x^3 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1)$

(5)  $3ax^2 + 6ax + 3a = 3a(x^2 + 2x + 1)$   
 $= 3a(x+1)^2$

(6)  $2ax^2 + 6ax + 4a = 2a(x^2 + 3x + 2)$   
 $= 2a(x+1)(x+2)$

你认为这个多项式因式还能分解吗?

请直接口答计算结果:

- $(x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$      $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$
- $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$      $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$
- $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$      $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
- $(x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$      $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$
- $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$      $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$
- $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$      $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$
- $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$      $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$
- $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$      $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

### 观察与发现

十字相乘法:  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

反过来:  $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

如果二次三项式  $x^2+px+q$  中的常数项  $q$  能分解成两个因数  $a, b$  的积, 而且一次项系数  $p$  恰好等于  $a+b$ , 那么  $x^2+px+q$  就可以进行如上的因式分解。

### 试一试: 把 $x^2 + 3x + 2$ 分解因式

分析:  $(+1) \times (+2) = +2$  —— 常数项  
 $(+1) + (+2) = +3$  —— 一次项系数

十字交叉线:

```

  x   +1
  x   +2
  
```

解: 原式 =  $(x+1)(x+2)$

利用十字交叉线分解系数, 把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法。

### 请大家记住公式

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

### 例1: 分解因式:

$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

```

  x   +3
  x   +1
  
```

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

```

  x   -3
  x   +1
  
```

### 练习一

将下列各式用十字相乘法进行因式分解

- $x^2 - 7x + 12$
- $x^2 - 4x - 12$
- $x^2 + 8x + 12$
- $x^2 - 11x - 12$
- $x^2 + 13x + 12$
- $x^2 - x - 12$

课堂小结

对于  $x^2+px+q$

- 当  $q > 0$  时,  $a, b$  同号, 且  $a, b$  的符号与  $p$  的符号相同。
- 当  $q < 0$  时,  $a, b$  异号, 且  $a, b$  的绝对值之差等于  $p$  的绝对值。

### 例2: 分解因式

(1)  $x^2 - 9y^2 + 14y^2$     (2)  $y^4 - 7y^2 - 18$

解: (1) 原式 =  $(x-2y)(x-7y)$   
(2) 原式 =  $(y^2+2)(y^2-9)$   
 $= (y^2+2)(y+3)(y-3)$

### 练习: 把下列各式分解因式

- $a^2 - 13a - 42$
- $x^2 - 3xy - 18y^2$
- $m^2 + 17mn + 30n^2$
- $x^4 - 13x^2 + 12$

### 比一比谁的速度快!

用十字相乘法进行因式分解:

- $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$
- $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$
- $x^2 - 2x - 10 = (x+2)(x-5)$
- $x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4)$
- $x^2 - 2x - 28 = (x-7)(x+4)$
- $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$
- $x^2 - 4x + 2 = (x-1)(x-2)$
- $x^2 + 7x + 12 = (x+2)(x+4)$
- $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$
- $x^2 + 4x - 21 = (x-3)(x+7)$
- $x^2 + 12x + 12 = (x+12)(x+1)$
- $y^2 + 9y - 25 = (y+5)(y-5)$
- $y^2 - 11y - 60 = (y-12)(y+5)$
- $y^2 + 39y + 48 = (y+3)(y+16)$
- $y^2 + y - 130 = (y+13)(y-10)$
- $x^2 - 35x + 120 = (x-24)(x-5)$
- $x^2 + 33x + 180 = (x+12)(x+15)$

### 作业: 把下列各式分解因式:

- $p^2 + 10p + 16$
- $x^2 + 3xy - 4y^2$
- $x^2y^2 + 16xy + 48$
- $(2+a)^2 + 5(2+a) + 6$
- $x^4 - 13x^2 + 36$
- $a^4 + 7a^2 - 98$
- $x^4 - 2x^2 - 48x^2$

### 例5: 把 $(x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24$ 分解因式

### 例6: 把 $(x^2+2x+3)(x^2+2x-2) - 6$ 分解因式

### 例7: 把 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3$ 分解因式

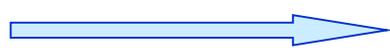
### 拓展创新

把下列各式分解因式

- $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8$
- $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 11) - 12$
- $x^{n+1} + 3x^n + 2x^{n-1}$
- $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 16$

## 整式乘法

兩個一次二項式相乘的積



一個二次三項式

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

反過來，得

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

一個二次三項式



兩個一次二項式相乘的積

因式分解

如果二次三項式 $x^2+px+q$ 中的常數項 $q$ 能分解成兩個因數 $a$ 、 $b$ 的積，而且一次項係數 $p$ 又恰好等於 $a+b$ ，那麼 $x^2+px+q$ 就可以進行如上的因式分解。

## 課堂小結

1. 二次三項式 $x^2+px+q$ 可用以下公式進行因式分解：

$$x^2+px+q=(x+a)(x+b), \text{ 其中 } q=ab, \text{ 且 } a+b=p.$$

2. 掌握方法：拆分常數項，驗證一次項。

3. 符號規律：

當 $q>0$ 時， $a$ 、 $b$ 同號，且 $a$ 、 $b$ 的符號與 $p$ 的符號相同；

當 $q<0$ 時， $a$ 、 $b$ 異號，且絕對值較大的因數與 $p$ 的符號相同。

# 分享内容

## 目錄 Contents

1

課型特點及教學模式



2

教學目的及教學要點



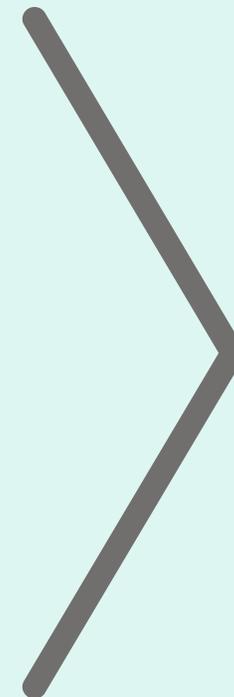
3

案例分析並改進方案



4

注意事項及建議



# 課型特點



體現學生的學習活動是在  
進行“命題學習”

1

課型特點及教學模式



# 教學模式

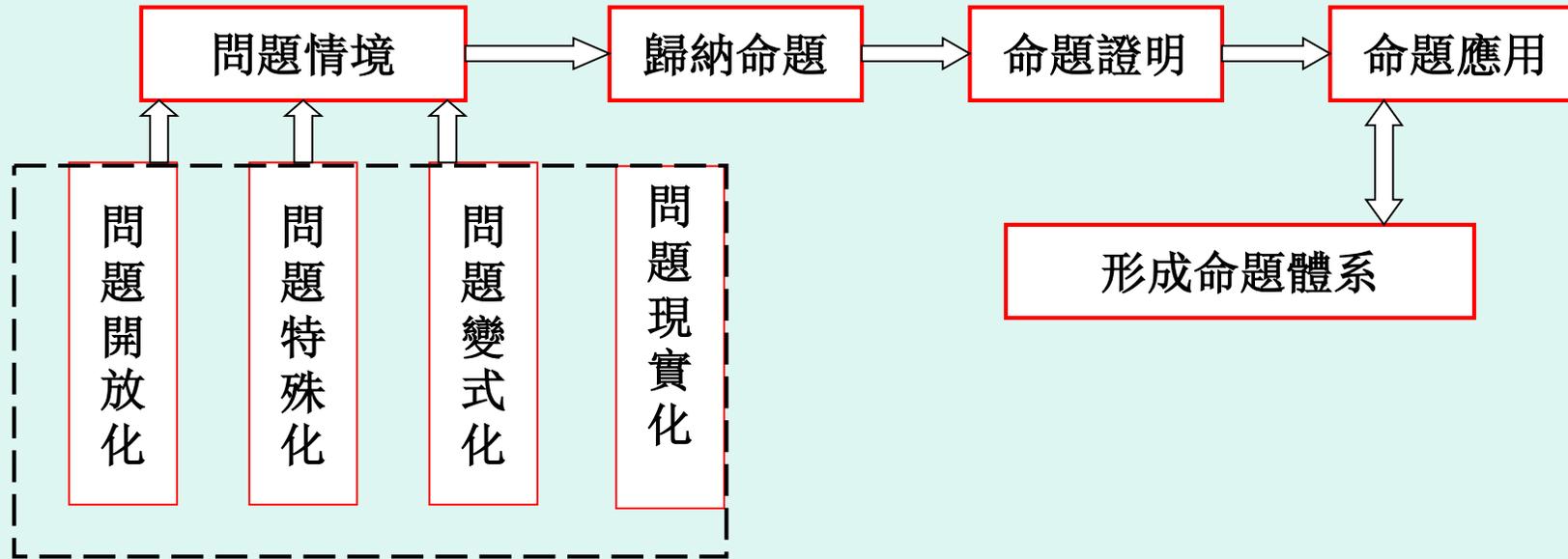


圖1 發生式命題教學模式

# 教學模式



圖2 結果型命題教學模式

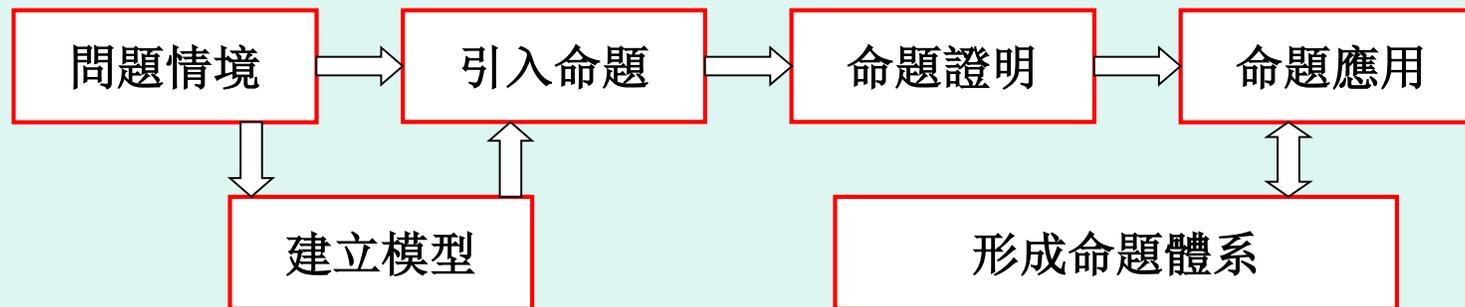
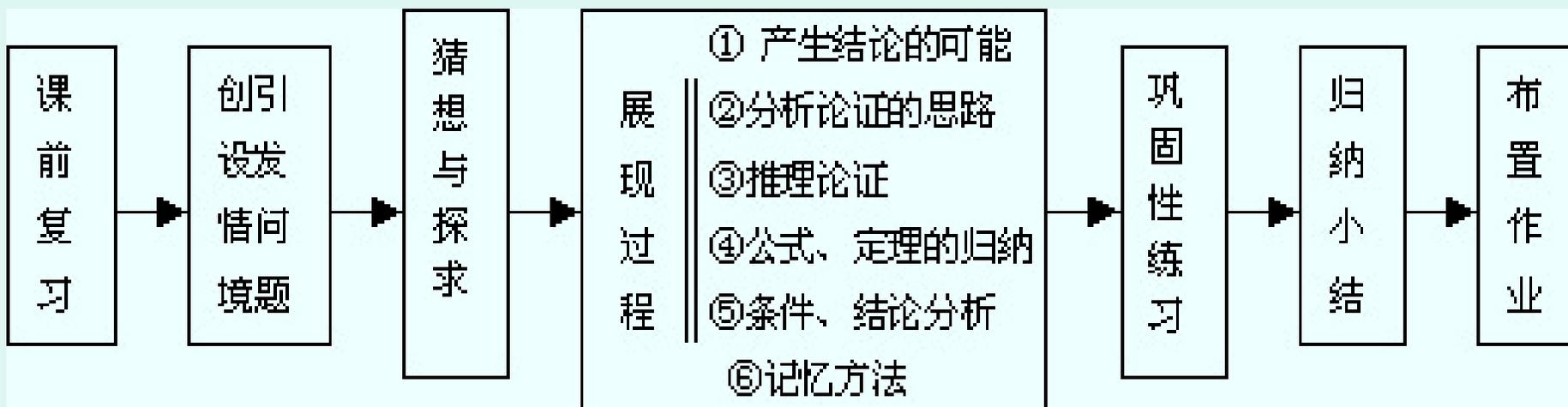


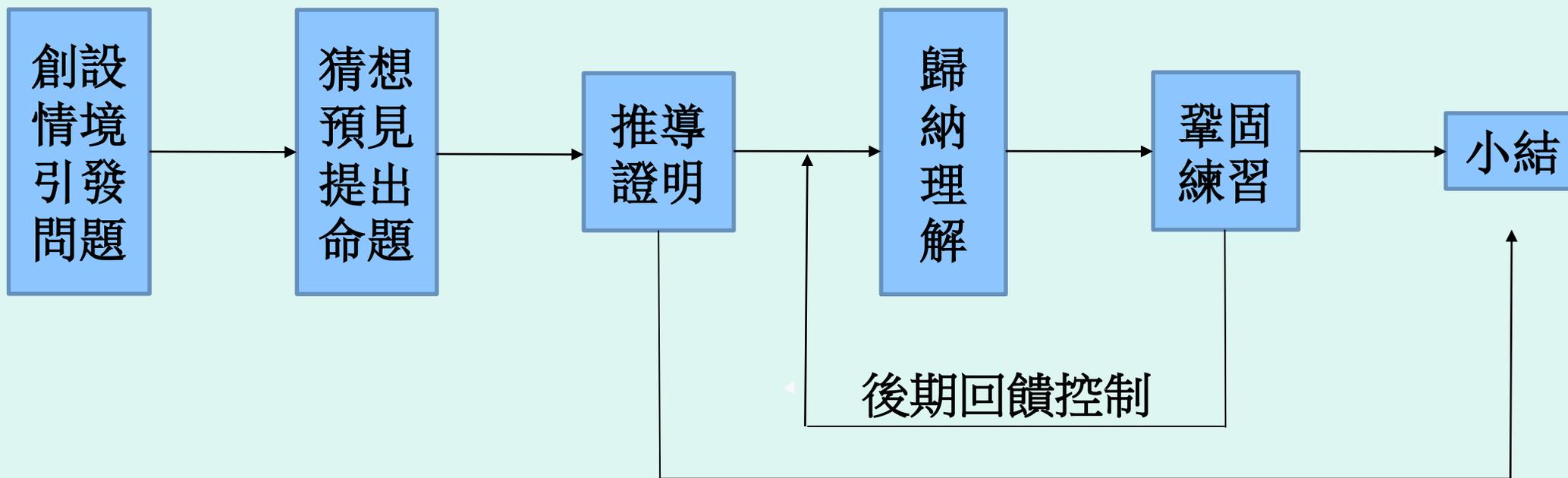
圖3 問題解決型命題教學模式

# 課堂結構

- 引入——觀察——猜想——證明——归纳——應用



- 教學控制框圖



基本數學思想、數學方法的歸納、梳理

# 教學目標



**1.揭示公式的來龍去脈，揭示其推導、論證中所用的有代表性的數學思想、思維方法和典型的數學技能技巧**

**2.交代清楚公式、定理適應的範圍及成立的特定條件，理解由某一條件下所得出的必然結論**

# 教學要點



**1.關鍵：公式、定理的推導證明的全過程**

**2.準確掌握條件和結論，瞭解條件的性質和作用，掌握公式變形的各種形式，並能運用結論進行進一步的計算和證明，解決實際問題**

# 案例分析

## 案例1、用公式法求解一元二次方程 教學設計

# 案例分析

**案例2：**弦切角定理的教學設計方案：

- (1) 給出弦切角的定義
- (2) 展示弦切角性質定理
- (3) 舉例應用弦切角定理
- (4) 學生練習
- (5) 課堂小結
- (6) 佈置作業

弦切角定理教學改進方案：

- 進行教學設計時，應注意：

第一，有效選擇命題**教學模式**。

第二，認真分析證明**思路**，確定學生在理解證明時的**難點**，找出相應突破難點的**策略**。

第三，充分揭示蘊含在數學證明中的**數學思想方法**。

第四，對一些重要的定理，宜採用**多種不同的方法**證明。

第五，形成**命題體系**。



• **建議：組織教學內容時思考以下問題：**

	思考的問題
教學內容 的組織	所講授的命題與哪些命題有關？它們之間存在什麼數學抽象關係？
	命題是採用什麼方式引入的？就該命題而言，這種引入方式是否恰當？
	命題證明的思路是否清晰？難點是否突破？
	該命題是否宜用多種方法證明？
	是否充分揭示了命題中的數學思想方法？
	是否幫助學生形成命題體系？



# 實施課堂教學時，應注意：



注重培養學生創造性思維能力及抽象思維能力。



克服急功近利的“結論式”的命題教學心理。



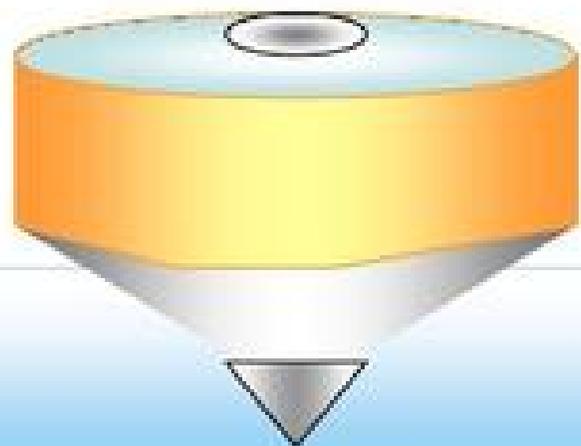
對公式、定理的記憶方法。



公式、法則等數學原理從文字到數式的互譯。

给我最大快乐的，  
不是已懂的知识，  
而是不断的学习。

——高斯



謝謝聆聽！