價值觀教育

學習活動：對圓周率的探索

年級/學習階段：中二

☐ 建基於一個學習領域課題			☑ 專題研習
學習領域： ☐ 科學	☑ 數學	☐ 科技	

主要學與教模式/策略(可選擇多於一項)：

☑ 探究學習　☑ 解難為本學習　☑ 電子學習　☑ 合作學習

☑ 設計與製作　☐ 直接講授　☐ 其他：價值觀

學習目標(包括共通能力，如創造力、協作和解決問題能力)：

學生能夠：

1. 通過細緻觀察，根據已有知識，尋找問題解決的突破口，培養邏輯思維和判斷力。
2. 學會運用簡單的實驗模擬尋找解決問題的方法。設計和進行探究實驗，精確測量，搜集資訊，統計資料。
3. 熟練運用尺規作圖，做出圖形，精確測量。會依據三角形相似對應邊成比例及三角函數解三角形等數學知識，進行計算，求解出應有結論。
4. 反思問題解決過程，對比測量和運算結果，加深對極限思想的理解。
5. 拓展對圓周率的瞭解，借助閱讀π的發展史，提升民族自豪感。

先備知識：

1. 數學科：尺規作圖，三角形相似對應邊成比例及三角函數解直角三角形　，測量和資料統計
2. 科技科：　設計實驗、製作實驗設施、測量實驗結果

學習難點：

1. 合理設計實驗各操作環節細節，使測量資料精准。
2. 借助尺規作圖，精確做出圖形並求解。
3. 依託逼近實踐，理解極限思想。

	學習重點	涉及課程內容/元素	學習領域		
			科學	數學	科技
1.	設計研究方案，精確測量，處理資料	科學探究、公平測試	✓	✓	✓
2.	根據尺規作圖規則，做出內接、外切正多邊形，求解邊的長度	三角形相似對應邊成比例及三角函數解直角三角形		✓	
3.	對比結果，總結規律，理解極限思想	歸納分析、極限思想		✓	

評估：

1. 合理設計實驗，實驗資料精准
2. 正確作圖，依據測量資料，數學建模，運算，獲得結論
3. 歸納資料特徵，形成極限思想
4. 通過延伸閱讀，瞭解π的發展史，產生民族自豪感

簡介	本課題希望從多方面促進青少年的數學素質的提高。引入環節企圖透過「情境」設置一個容易錯答的有趣問題，讓學生自行算出並發現不管是大圓還是小圓，圓周長與半徑的比為常數，從而引出本節課主題：探究這個常數。動手操作可以提升學生的學習興趣, 完成第一活動，需要科學實踐能力，設計和進行探究實驗，收集資料、以簡單的圖表表達已知數據。學會觀察細節，培養創造力及解決問題的能力。活動二、三藉由透過閱讀相關的數學史—中國劉徽的「割圓術」以及西方阿基米德的「窮舉逼近法」，從「逼近」的角度切入。引導學生去感受到「所有不規則圖形中的曲線，只要透過無限份數的切割，切割後的曲線將會逼近於直線」。當學生有了「逼近」的概念之後，用尺規精細作圖，細緻觀察、測量，找出相關直角三角形，利用三角形相似對應邊成比例及三角函數求解未知量，培養數學建模能力。比較不同程度的逼近，理解影響多邊形的邊長與圓周長的因素，對比分析歸納結果，培養對極限思想的理解。 本課耗費許多時間來教「圓」，除了讓學生學到圓周率、圓周長公式外，其實真正重要的內涵是為了教導學生具備「逼近」的概念，而這「逼近」是下一學段學微積分非常重要的關鍵概念。 這是一個數學探究的完整的過程。延伸閱讀部分，不僅給了本節課學生活動的提示，也讓學生瞭解π的發展史，拓展知識面，通過對數學史的瞭解，為中華民族的智慧而自豪，加深對數學家孜孜不倦的科學探究精神的認識，促進良好價值觀的形成。
與主要更新重點 (MRE) 連系 (如適用)：	☐ 跨課程語文學習 RaC　☑ 價值觀教育 ☑ 開拓與創新精神　☐ 照顧學生的多樣性/資優教育
延伸學習：	π的發展史
學校觀察：	
參考資料/附件：	工作紙、閱讀材料、延伸閱讀材料

工作紙

對圓周率的探究

一、　情境：

	地球半徑是 6371km，如果用繩子沿著赤道轉一圈後，將繩子加長 30 米還在赤道上方撐成一個圓，那麼，繩子離地面的高度將會是 A.僅僅能讓我的手指頭穿過去 B.只夠一隻小貓鑽過去 C. 我恰好能穿過去 D. 一輛卡車能從下麵穿過

隨意畫一個圓形，圓周長度大約是直徑的三倍。這個事實，最耳熟能詳的是傳統木匠。因此，數學史上圓周率π的第一個有意義近似值（等於3），可能是數學家向工匠學習的結果。這也可以說明古代中國算書中的「週三徑一」是怎麼來的。在《聖經 舊約》中有一個故事說明這個比：「於是，他鑄了一個銅海，樣式是圓的，高五腕尺、徑十腕尺、圓周長三十腕尺。」（列王紀，上篇）。可見，幾千年前的人們就在不懈探求圓的周長與直徑的關係。今天，對我們來說，是不是好求些了？讓我們來試一試吧。

二、　活動一：　量一量　--設計和進行實驗研究圓周長與直徑關係

每四名學生組成小組，設計實驗，製作實驗設施，測量實驗資料，揭示圓周長與直徑關係。

1、如果我們估算π，需要那些資料？怎樣得到？

____

2、設計實驗，求解π。

____

三、　活動二：　畫一畫--使用外切正多邊形和內接正多邊形逼近π

看延伸閱讀材料，每四名學生組成小組，分工合作，尺規作圖，借助圓內切、外接正四邊形、六邊形、八邊形、十二邊形逼近圓周，測量、計算資料，揭示π的精確度與切割大小的關係，體會無限趨近的含義。

材料：硬卡紙、圓規、刻度尺、計算器

圖	測量及計算結果
	測量

<table>
<tr><td></td><td>計算</td></tr>
<tr><td colspan="2">結論：＿＿＿＿＿$<\pi<$＿＿＿＿</td></tr>
<tr><td>圖</td><td>測量及計算結果</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>測量</td></tr>
<tr><td>計算</td></tr>
<tr><td colspan="2">結論：＿＿＿＿＿$<\pi<$＿＿＿＿</td></tr>
</table>

四、活動三：算一算

在上面的活動中，圓內接和外切正多邊形的邊長是測量出來的，進而求出了周長，估計出來 π ，我們能不能不是測量，而是通過計算，得到圓內接和外切正六、十二邊形的周長？

價值觀教育--對圓周率的探究（答案紙）

一、 情境：

	地球半徑是 6371km，如果用繩子沿著赤道轉一圈後，將繩子加長 30 米還在赤道上方撐成一個圓，那麼，繩子離地面的高度將會是 A.僅僅能讓我的手指頭穿過去 B.只夠一隻小貓鑽過去 C. 我能穿過去 D. 一輛卡車能從下麵穿過 答案：D，因為半徑的增加量為 $30/2\pi \approx 4.78$ 米

隨意畫一個圓形，圓周長度大約是直徑的三倍。這個事實，最耳熟能詳的是傳統木匠。因此，數學史上圓周率 π 的第一個有意義近似值（等於3），可能是數學家向工匠學習的結果。這也可以說明古代中國算書中的「週三徑一」是怎麼來的。在《聖經 舊約》中有一個故事說明這個比：「於是，他鑄了一個銅海，樣式是圓的，高五腕尺、徑十腕尺、圓周長三十腕尺。」（列王紀，上篇）。可見，幾千年前的人們就在不懈探求圓的周長與直徑的關係。今天，對我們來說，是不是好求些了？讓我們來試一試吧。

二、活動一：　量一量　--設計和進行實驗研究圓周長與直徑關係

每四名學生組成小組，設計實驗，製作實驗設施，測量實驗資料，揭示圓周長與直徑關係。

1、如果我們估算 π ，需要那些資料？怎樣得到？

圓的周長和直徑

2、設計實驗，求解 π 。

借助一根沒有彈性的細繩和刻度尺測量一枚硬幣、一個玻璃杯的底部，一個餐盤或一個呼啦圈的周長和半徑，設計一個表格，為整個小組的資料做簡單的統計，求圓周長和直徑的比。

一、 找一個罐子，瓶子或其它帶圓形的物體。準備一根無彈力的細繩。

二、 用膠帶固定細繩的一端於罐子的中間位置，使得細繩與罐子的軸線成直角。在膠帶和細繩的交接處，標注一個記號。

三、 用細繩繞罐子一圈，並於膠帶與繩子交接處的標記重合處，做第二個標記點。

四、 展開這個細繩並撕下膠帶。

五、 測量兩個標記點之間的長度，它將是罐子的周長 C。

六、 測量罐子的直徑 d。

將測量值記錄與表格中，將周長 C 除以直徑 d，記錄這個值，全班的資料進行統計，估計出圓周率。

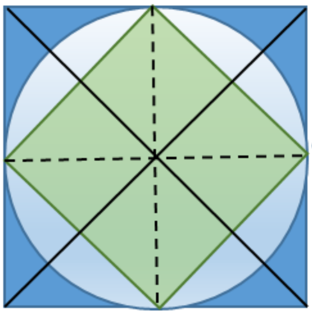
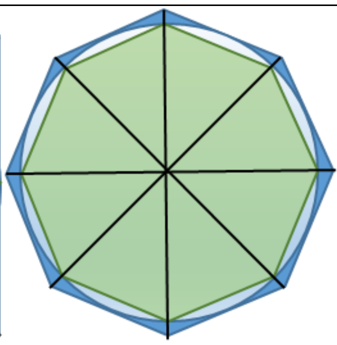
測量物體	直徑	圓周長	$\frac{圆周长}{直径}$
1	5.4	17.0	3.148
2			
3			

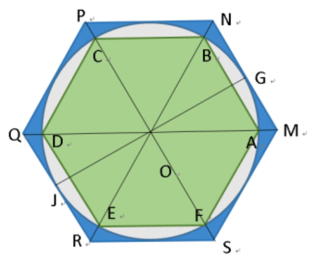
4			
			
結論：			

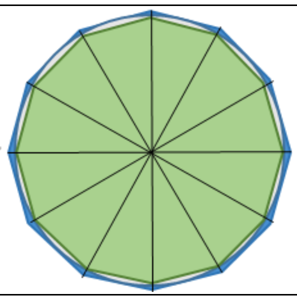
三、活動二：　畫一畫--使用外切正多邊形和內接正多邊形逼近 π

看延伸閱讀材料，每四名學生組成小組，分工合作，尺規作圖，借助圓內切、外接正四邊形、六邊形、八邊形、十二邊形逼近圓周，測量、計算資料，揭示 π 的精確度與切割大小的關係，體會無限趨近的含義。

材料：硬卡紙、圓規、刻度尺、計算器

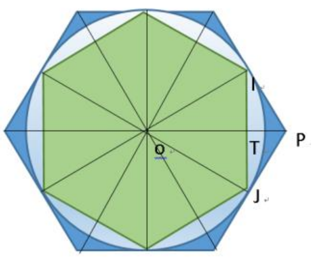
圖	測量及計算結果
 	測量 28.43<圓周長<40.2 30.4<圓周長<32.8 計算 用內接正四邊形、外切正四邊形周長度量得到：2.843<C<4.02 用內接正八邊形、外切正八邊形周長度量得到：3.04<C<3.32.
結論：3.04 < π < 3.32.	
步驟：給定一個直徑為 10cm 的圓，做出圓的外切多邊形和內接多邊形，圓周長必介於這兩個多邊形的周長之間。 一、　畫一個以 O 為圓心，10 為直徑的圓。 二、　再分別畫出圓 O 的外切正方形和內接正方形，並畫出對角線。 三、　測量這兩個正方形的每一個邊長，如果作圖夠精確，那麼，外切正方形周長接近 40cm，內接正方形周長接近 28cm。 四、　假設此圓的周長，及圓周長是 10C 釐米，那麼，我們可以寫成：28.43<10C<40.2，將不等式兩邊同時除以 10，得到：2.843<C<4.02 同理：借助角平分線做圓外切和內接正八邊形，測量邊長，求得 3.04<C<3.28	
圖	測量及計算結果
	測量

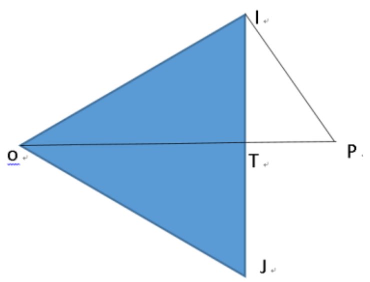
<table>
<tr><td>

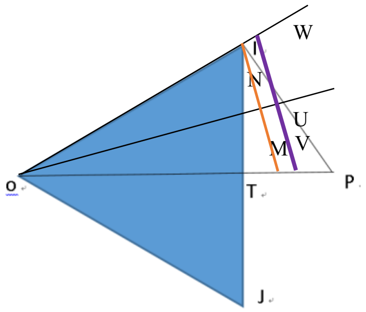
</td><td>計算</td></tr>
<tr><td colspan="2">結論：$3.12<C<3.24$</td></tr>
<tr><td colspan="2">步驟：使用外切正六邊形和內接正六邊形估計直徑與圓周的關係式
一、　畫一個直徑為 10cm 的圓.
二、　以與半徑相同的長度將 A 到 F 標識出來。
三、　平分∠AOB,∠BOC 等等的角，並置入一個正六邊形於圓內。
四、　做一條通過 G 與圓相切的直線，此切線與直線 GOJ（直徑）垂直，
五、　這條切線與直線 BOE 及直線 AOD 分別交於 N,M 兩點，用圓規以 O 為圓心，OM 為半徑畫一圓。
六、　連接 M 點到 N 點，這是外切正六邊形的一個邊長，接著，畫出剩下的 R,Q,S 等各點。
七、　連接各點，做出外切正六邊形
八、　度量外切正六邊形的每一條邊長，將所有邊長相加，得到外切正六邊形的周長。度量內接正六邊形的每一條邊長，將所有邊長相加，得到內接正六邊形的周長。
九、　將所得值表示如下：內接正六邊形周長$<10C<$外切正六邊形周長。
十、　假設此圓的周長，及圓周長是 10C 釐米，那麼，我們可以寫成：$30<10C<35.4$，將不等式兩邊同時除以 10，得到：$3.0<C<3.54$
同理：借助角平分線做圓外切和內接正十二邊形，測量變長，求得 $3.12<C<3.24$</td></tr>
</table>

四、活動三：算一算

在上面的活動中，圓內接和外切正多邊形的邊長是測量出來的，進而求出了周長，估計出來 π，我們能不能不是測量，而是通過計算，得到圓內接和外切正多邊形的邊長？

<table>
<tr><td>圖形</td><td>步驟</td></tr>
<tr><td>


</td><td>計算內接正六邊形、外切正六邊形周長
一、　從內接正六邊形中截取一個三角形 OIJ，注意圓 O 的直徑為 10cm，半徑為 5cm.
二、　三角形 OIJ 為等邊三角形，所以邊 IJ 的長度為 5 cm，這個內接正六邊形周長為 30 cm.
三、　外切正六邊形周長的計算有點複雜，過 O 做 IJ 的垂線，交 IJ 于 T，形成一個直角三角形 OQI，當∠OIQ 為直角時，IT 的長度是 IJ 的一半，即 2.5cm.
四、　利用畢氏定理，可以求出 OT=4.3301
五、　現在，要求出 IQ 長度，使用⊿OIT 以及⊿OQI 相似，對應邊成比例，代入已知值，得到 IQ=2.887
六、　IQ 是 PQ 長的一半，所以外切正六邊形邊長</td></tr>
</table>

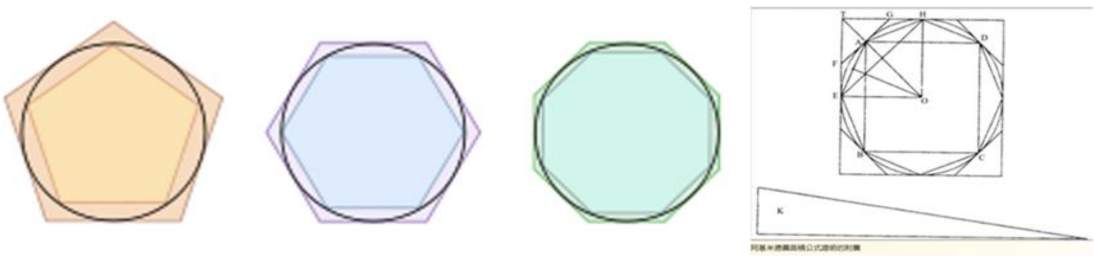
 	PQ=5.7734，周長為 34.640. 七、 結論：30<10C<34.640，所以 C 介於 3 到 3.464 之間。 求圓外切和內接十二邊形邊長 一、作∠TOI 的角平分線，與圓交於 U，OP 與圓交於 M，MI 為圓內接十二邊形邊長，WV 為圓外切十二邊形邊長，∠MON=15°，OI=ON=5，MI= $2\times5\times\sin15°$ =2.588，WV= $2\times5\times\tan15°$ =2.679，所以，圓外切和內接十二邊形周長分別為 31.058 和 32.153，所以 C 介於 3.106 到 3.15 之間。

延伸閱讀：

材料一：π 的發展史

(一) 阿基米德的窮舉逼近法

阿基米德（前 287 年－前 212 年），希臘化時代的數學家、物理學家、發明家、工程師、天文學家。出生於西西里島的錫拉庫紮，據說他在亞歷山大求學時期，發明了阿基米德式螺旋抽水機，今天的埃及仍在使用。阿基米德對數學和物理學的影響極為深遠，被視為古希臘最傑出的科學家。阿基米德將歐幾裡得提出的趨近觀念作了有效的運用，他提出圓內接多邊形和相似圓外切多邊形，當邊數足夠大時，兩多邊形的周長便一個由上，一個由下的趨近於圓周長。他先用六邊形，以後逐次加倍邊數，到了九十六邊形，他還通過比較圓內接和外切正 96 邊形的周長而給出上下界估計 $3+{}^{10}/_{71}<\pi<3+{}^{10}/_{70}$。阿基米德還使用窮竭法來計算圓周所圍住的面積，具體說來就是用一個面積越來越大，邊數越來越多的多邊形來填充這個圓。當多邊形的邊數越來越多時，其面積與圓半徑的平方之商可以任意接近 π，由此證明半徑為 r 的圓周所圍面積為 πr^2，其中 π 定義為圓的周徑之比(C/d)或圓面積與半徑平方之比(A/r^2)。



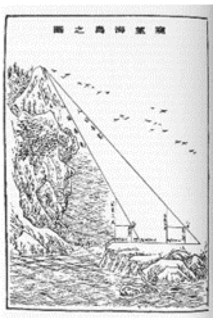
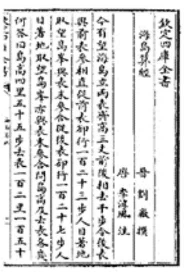
阿基米德計算圓周率示意圖

(二)劉徽的割圓術

三國時代數學家劉徽的割圓術是中國古代數學中一個十分精彩的演算法。在此之前，圓周率採用「徑一週三」的實驗資料。劉徽是中國數學史上最先創造了一個從數學上計算圓周率到任意精確度的疊代程式的數學家。劉徽割圓術是建立在圓面積論的基礎之上的。他首先論證，

將圓分割成多邊形，分割來越細，多邊形的邊數越多，多邊形的面積就和圓面積沒有差別了。他自己通過分割圓為192邊形，計算出圓周率在3.141024 與 3.142704之間。

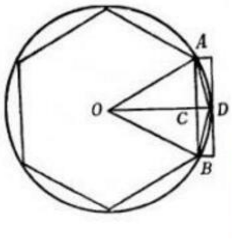
劉徽（約225年—約295年），山東濱州鄒平人，魏晉期間偉大的數學家，中國古典數學理論的奠基人之一。在中國數學史上作出了極大的貢獻，他的傑作《九章算術注》和《海島算經》，是中國最寶貴的數學遺產。他是中國最早明確主張用邏輯推理的方式來論證數學命題的人。劉徽在曹魏景元四年注《九章算術注》。提出了"割圓術"，即將圓周用內接或外切正多邊形窮竭的一種求圓面積和圓周長的方法。他從直徑為2尺的圓內接正六邊形開始割圓，依次得正12邊形、正24邊形……，割得越細，正多邊形面積和圓面積之差越小，用他的原話說是「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣」。他利用割圓術科學地求出了圓周率π=3.1416的結果。在《九章算術 圓田術》注中，他用割圓術證明了圓面積的精確公式，並給出了計算圓周率的科學方法。他首先從圓內接六邊形開始割圓，每次邊數倍增，算到192邊形的面積，得到π=157/50=3.14，又算到3072邊形的面積，得到π=3927/1250=3.1416，稱為「徽率」。劉徽提出的計算圓周率的科學方法，奠定了此後千餘年來中國圓周率計算在世界上的領先地位。

	 欽定四庫全書 海島算經 晉 劉徽 撰 唐 李淳風 注 今有望海島立兩表齊高三丈前後相去千步令後表與前表參相直從前表卻行一百二十三步人目著地取望島峯與表末參合從後表卻行一百二十七步人目著地取望島峯亦與表末參合問島高及去表各幾何 荅曰島高四里五十五步去表一百二里一百五十	

(三) <u>祖沖之的密率</u>

祖沖之（429 年－500 年），南北朝時期傑出的數學家、天文學家，主要成就在數學、天文曆法和機械製造三個領域。西元 464 年，他編制了《大明曆》，計算了圓周率。祖沖之研究過《九章算術》和劉徽所做的注解，他還著有《綴術》一書，彙集了祖沖之父子的數學研究成果（祖沖之的兒子祖暅之也是數學家），在唐代被收入《算經十書》，成為唐代國子監算學課本，當時學習《綴術》需要四年的時間，可見《綴術》的艱深。《綴術》曾經傳至朝鮮和日本，但到北宋時這部書就已軼失。人們只能通過其他文獻瞭解祖沖之的部分工作，據《隋書·律曆志》記載，祖沖之以「以直徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率，圓徑一百一十三，圓

周三百五十五。約率，圓徑七，週二十二」，即所求圓周率盈數（即過剩的近似值）為3.1415927；朒數（即不足的近似值）為 3.1415926，圓周率的真值介於盈朒兩數之間。《隋書》沒有具體說明祖沖之是用什麼方法計算出盈朒兩數的。一般認為，祖沖之採用的是劉徽割圓術分割到 24576 邊形，又用劉徽圓周率不等式得祖沖之著名的圓周率不等式：$3.1415926<\pi<3.1415927$。祖沖之的這一結果精確到小數點後第 7 位，直到一千多年後才由 15 世紀的阿拉伯數學家阿爾·凱西以 17 位元有效數字打破此記錄。按照當時計算使用分數的習慣，祖沖之還採用了兩個分數值的圓周率：「約率」$\pi=\frac{22}{7}$（或稱之為「疏率」）以及「密率」 $\pi=\frac{355}{113}$ ，在分母<16600 的所有整分數中，密率的比值最接近圓周率。





（四）<u>對比</u>

希臘數學家阿基米德用窮舉逼近法計算圓周率，他的論證以計算線長為依據，在推導過程中不考慮多邊形面積面積，和劉徽的以面積計算為中心的割圓術成對照。劉徽在圓周率領域的貢獻，不僅在於求得=3.1416，更重要的在於他創造了一世界數學史上最精彩的割圓術：阿基米德割圓術和劉徽割圓術一樣用雙向迫近，因而同樣嚴謹完備，但遠不如劉徽簡潔；阿基米德用雙歸謬法推證圓面積，不如劉徽用極限論先進；劉徽割圓術雖然不是世界最早，卻是數學史上最嚴謹完備簡潔的割圓術。劉徽割圓術簡單而又嚴謹，富於程式性，可以繼續分割下去，求得更精確的圓周率。南北朝時期著名數學家祖沖之用劉徽割圓術計算11次，分割圓為12288邊形，得圓周率3.1415926，成為此後千年世界上最準確的圓周率。

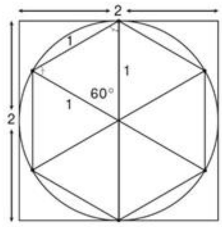
日本數學家三上義夫說：「約率無非是幾百年前希臘數學家阿基米德已經得到的數值，但是$\frac{355}{113}$這個分數，卻是翻遍古希臘，古印度和阿拉伯的數學文獻都找不到的分數，希臘人肯定不知道它；在歐洲直到 1586 年才由荷蘭人安托尼斯宗（Adriaan Anthoniszoon）求出這個比值。因此，中國人掌握這個非凡的圓周率分數比歐洲早出整整一千年之久」。為紀念這位偉大的中國古代數學家，三上義夫要求把$\frac{355}{113}$稱為「祖率」

<u>材料二</u>：

你可否在不用任何實質測量的條件下，證明 π 是一個接近 3 的數？

問題可以經由畫一個半徑為 1 的圓來回答，這個圓的面積是 $\pi 1^2=\pi$ 。在下圖中，我們畫出一個邊長為 2 的正方形，將這個圓完整的包在裡面。由於這個圓的面積一定小於正方形的面積，這就證明了 $\pi<4$。另一方面，這個圓內部可以畫出一個正六邊形，它的六個角平均分佈在圓周

上，六邊形可以分解成 6 個等邊三角形，其周長為 6，圓的周長 2π 小於 6，結論 π 介乎於 3 與 4 之間。

▲ 3<π<4 的幾何證明。 圖／《數學大觀念》	參考：維琪百科：劉徽的「割圓術」 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%89%B2%E5%9C%86%E6%9C%AF_(%E5%88%98%E5%BE%BD)