斐波那契数列与古代数学

学习范畴：数与代数
学习阶段：3
阅读材料：

“试把花卜心期，才簪又重数”。

一片片数花瓣的女孩子，用它来占卜爱情，摘一片代表“他爱我”，再摘一片代表“他不爱我”，摘到最后一瓣，大概就是爱情的谜底了。

可是你知道吗？其实花瓣的数量早已被大自然内定了，你摘下第一瓣花瓣时说出的心愿，往往就决定了最后一瓣花瓣的答案。

这个所谓的数学密码，究竟只是数学家编造出来的规则，还是大自然真正藏了什么不为人知的奥秘呢？

根据科学家后来研究，海芋、鸢尾花等是 3 瓣花瓣，野玫瑰、龙葵等是 5 瓣花瓣、波斯菊、血根草等是 8 瓣花瓣，豚草、玉米万寿菊、金银花是 13 瓣花瓣，紫菀、黑眼苏珊、菊苣是 21 瓣花瓣，车前草、除虫菊等是 34 瓣花瓣，米迦勒菊，菊科等是 55 或 89 瓣花瓣……

花朵花瓣的数目、树叶的叶子的顺序以及花朵的花序似乎都包藏了斐波那契数列中的数或性质。

一. 斐波那契与斐波那契数列

斐波那契，又称比萨的列奥纳多。中世纪最伟大的意大利数学家，西方第一个研究费波那契数，并将现代书写数和位值表示法系统引入欧洲。

列奥纳多的父亲威廉，是一位商人，在北非一带工作。当时仍是小伙子的斐波那契已经开始协助父亲工作。于是他学会了阿拉伯数字。

后来，斐波那契的才能受到弗里德里希二世的重视，因而被邀请到宫廷参加数学竞赛。他还曾向官吏和市民讲授计算方法。他的最重要的成果在不定分析和数论方面，除了《计算之书》外，保存下来的还有《实用几何》等四部著作。

斐波那契在《计算之书》中提出了一个有趣的兔子问题：

一般而言，兔子在出生两个月后，就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子来。如果所有的兔子都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子？

我们不妨拿新出生的一对小兔子分析一下：

第一个月小兔子没有繁殖能力，所以还是一对；

两个月后，生下一对小兔总数共有两对；

三个月以后，老兔子又生下一对，因为小兔子还没有繁殖能力，所以一共是三对；

……

依次类推可以列出下表：

经过月数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
总体对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

表中数字 1，1，2，3，5，8，13，…，构成了一个序列。这个数列有关十分明显的特点，那是：前面相邻两项之和，构成了后一项。

斐波那契在《算盘书》中从兔子问题得到斐波那契数列之后，并没有进一步探讨此序列，并且在 19 世纪初以前，也没有人认真研究过它。没想到过了几百年之后，十九世纪末和二十世纪，这一问题派生出广泛的应用，从而突然活跃起来，成为热门的研究课题。以致 1963 年成立了斐波那契协会，还出版了《斐波那契季刊》。

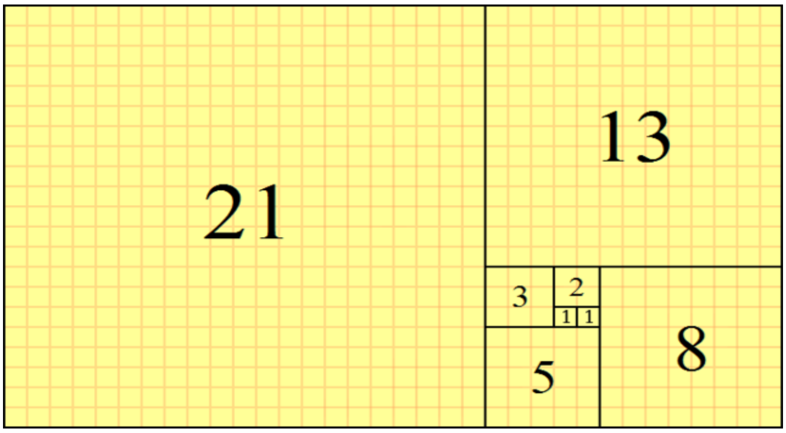
注：利用斐波那契、斐波纳契、神奇的斐波那契黄金比例等关键词，搜寻意大利数学家斐波那契的生平或网页或视频片段

二. 斐波那契数列与平方数、勾股数

1. 斐波那契数列的平方和，等于斐波那契数列中最后一个数和下一个数的乘积。如果 F_i 表示第 i 个斐波那契数（i=1, 2, 3, …），则有：

$$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 + {F_3}^2 + \cdots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}$$

有一个漂亮的无字证明图：



考察矩形面积得：

$$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 + {F_3}^2 + \cdots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}$$

代数证明如下：

$F_1^2=F_1F_2$

$F_2^2=F_2F_2=F_2(F_3-F_1)=F_2F_3-F_1F_2$

$F_3^2=F_3F_3=F_3(F_4-F_2)=F_3F_4-F_2F_3$

……

$F_n^2=F_nF_n=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n$

相加得：

$$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 + {F_3}^2 + \cdots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}$$

2. 斐波那契数列与勾股数

斐波那契数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

取连续 4 项，如 1，1，2，3，把第 1 项与第 4 项相乘得 3，把中间两项相乘再乘以 2 得 4，中间两项得平方和得 5，得到的三个数 3，4，5，有 $3^2+4^2=5^2$。

再比如 1，2，3，5，如法炮制得到三个数 12，5，13，有 $5^2+12^2=13^2$。

一般的取 $F_k, F_{k+1}, F_{k+2}, F_{k+3}$ 四项，即有

$$(2F_{k+1}F_{k+2})^2 + (F_kF_{k+3})^2 = (F_{k+1}^2+F_{k+2}^2)^2$$

如果取连续 5 项，如 1，1，2，3，5，把第二项与第四项相乘得到 3，把第三项乘以 2 得到 4，把第一项与第五项相乘得到 5，得到的三个数为 3，4，5，有 $3^2+4^2=5^2$。

再比如 1，2，3，5，8，如法炮制得到三个数 10，6，8，顺序变了，仍然有 $6^2+8^2=10^2$。

可以再举几例试试！

总结以上经验，如果从斐波那契数列中任取 5 个连续的项 a,b,c,d,e

(1)如果 a 是数列的奇数项，那么就有 $(bd)^2+(2c)^2=(ae)^2$

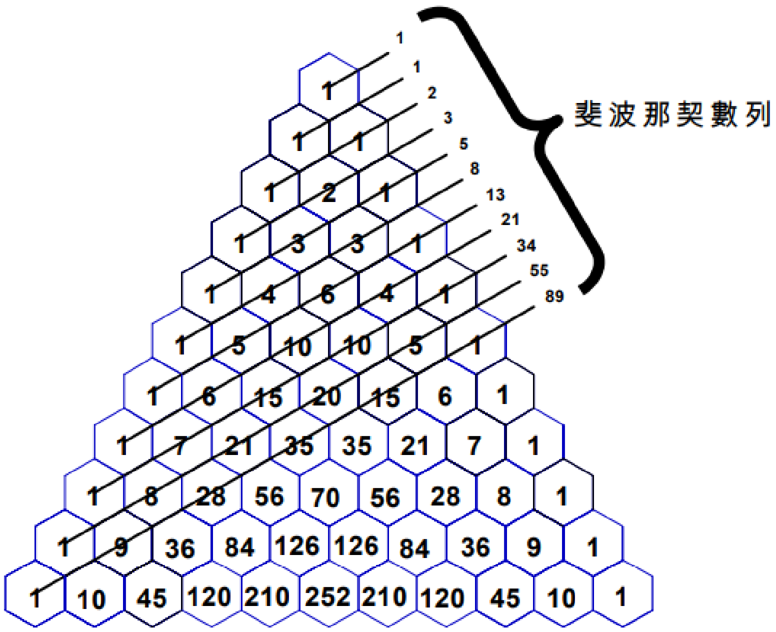
(2)如果 a 是数列的偶数项，那么就有 $(ae)^2+(2c)^2=(bd)^2$

注：关于勾股数生成公式还可以搜索魏晋时数学家刘徽和清代数学家沈利民的勾股数生成公式

三.斐波那契数列与杨辉三角

斐波那契数列是斐波那契研究兔子繁殖问题得到的数列，它的定义为：其第 n 个数是其第 n-2 个数与其第 n-1 个数的和。杨辉三角，是二项式展开系数在三角形中的一种几何排列。它们的背景是风马牛不相及的，但是它们之间也是有如下交错的关系：

1.杨辉三角中的斐波那契数列



用符号描述为：

$F_1 = C_0^0 = 1$

$F_2 = C_1^0 = 1$

$F_3 = C_2^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = C_3^0 + C_2^1 = 1 + 2 = 3$

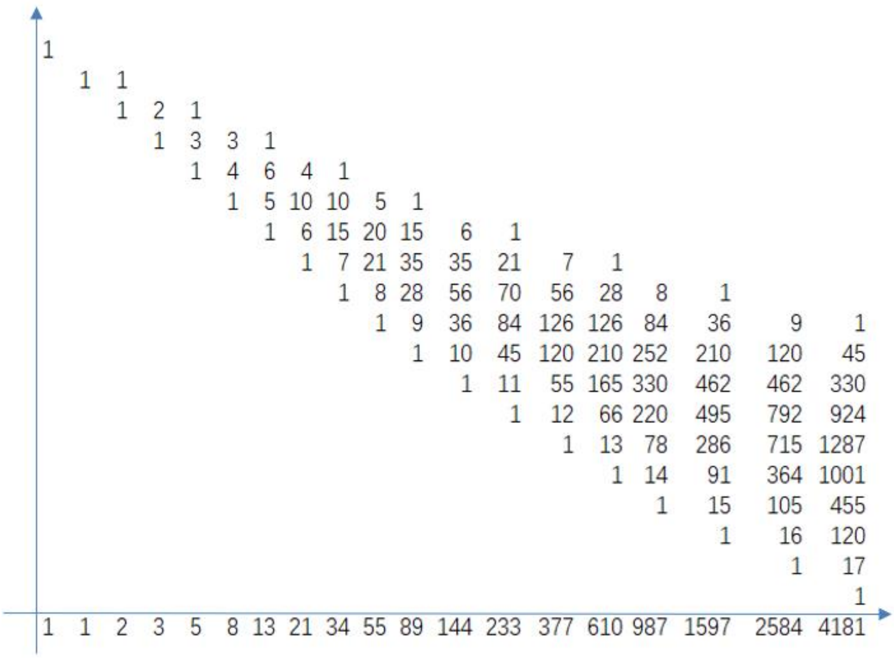
$F_5 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 = 1 + 3 + 1 = 5$

$F_6 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 = 1 + 4 + 3 = 8$

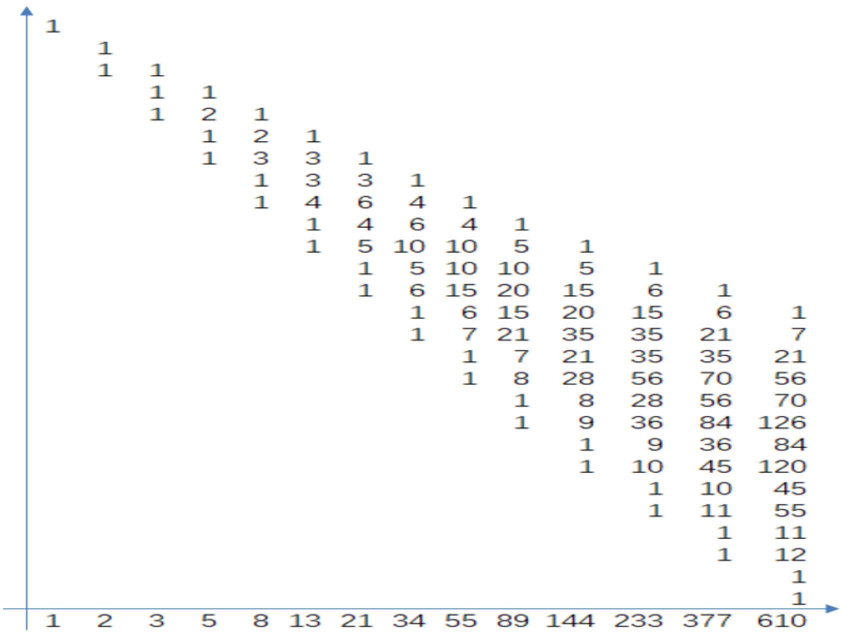
…

$F_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + \cdots + C_{n-1-m}^m \ (n - 1 \geq m)$

也可以进一步以如下图形整理，像一束光。



甚至将杨辉三角重复两次整理，依然会得到斐波那契数列：



2.斐波那契中的杨辉三角

如果想用斐波那契中的连续项生成斐波那契数列中的数,那么合成它们的系数就要用到二项式系数。

如： 1+1=2

$$1+2\times1+2=5$$

$$1+3\times1+3\times2+3=13$$

$$1+4\times1+6\times2+4\times3+5=34$$

2,5,13,34 仍是斐波那契数列中的项。

一般的，如果 F_k，F_{k+1}，F_{k+2}，…F_{k+i} 是斐波那契数列中的连续项，则有

$$\begin{aligned}
F_k &= F_k \\
F_k+F_{k+1} &= F_{k+2} \\
F_k+2F_{k+1}+F_{k+2} &= F_{k+4} \\
F_k+3F_{k+1}+3F_{k+2}+F_{k+3} &= F_{k+6} \\
F_k+4F_{k+1}+6F_{k+2}+4F_{k+3}+F_{k+4} &= F_{k+8} \\
F_k+5F_{k+1}+10F_{k+2}+10F_{k+3}+5F_{k+4}+F_{k+5} &= F_{k+10} \\
&\cdots \\
\sum_{i=0}^{m} C_m^i F_{k+i} &= F_{k+2m}
\end{aligned}$$

注：相关的证明可自行搜索互联网

其实，这只是斐波那契数列的冰山一角，数学家们并不甘于到此为止，而是进一步的去发现更本质的规律。希望你会发现，学习数学并不只是为了考试，虽然数学的美是隐蔽的，也是纯粹的，永恒的。