

數學教育資源：數學閱讀-數學謎題

學習階段：3

學習範疇：數與代數範疇

學習單位：整數指數律

學生已有知識／必備學習條件：合成數，約數(因數)

教學目標／學習成果：

1. 進一步運用數來建立及解應用題
2. 學會用數學語言來表達問題，即數學建模能力
3. 提高思考的維度，學會從不同的角度思考問題

教學過程

流程	內容	設計意圖及參考
謎題 1	將 10 盞電燈進行編號，從 1 編到 10，把所有的開關都打開即讓所有的電燈都亮著，然後進行以下操作：把編號為 1 的倍數的電燈按反方向撥一次開關，把編號為 2 的倍數的電燈按照當前狀態向反方向再撥一次開關，然後將編號為 3 的倍數的電燈又按照反方向再撥一次開關，.....依此類推，直到 10 次。試問：這些操作完成以後，哪些燈是關著的？	
活動 1	<a href="https://mathigon.org/polypad/gNXG1aK0QPS8w">https://mathigon.org/polypad/gNXG1aK0QPS8w</a> 在 mathigon 上操作並記錄每一次的結果。	
討論	你覺得怎樣記錄結果比較簡潔？比較一下！	強調數學符號的簡潔性，用“1”表示燈開著的狀態，用“0”表示燈關閉的狀態 [建議用字母，例如 T (true) 和 F(false)]
任務	將結果回饋到作業紙上	
	將原題中的燈改為 100 盞，次數改為 100 次，你如何知道答案呢？為什麼？	
討論		提示：如果只看某一列(例如：第三列)，如何知道最後結果開還是關？
問題	你能從數學的角度描述這個問題嗎？即在	問題的本質實際上是：

	數學中我們研究什麼問題能解決剛才提出的謎題？	編號為 $n$ 的燈開關的次數，即它的約數(因數)的個數是奇數還是偶數。
猜想	只有完全平方數的約數(因數)個數為奇數？	
問題	能否證明你的猜想？	
小結	你是如何發現這個問題的本質的？	換個角度思考。
謎題 2	七盞燈亮著,每次改變其中四盞燈的狀態,問經過多少次可以讓燈全部關閉?能實現嗎？	
活動	繼續在 mathigon 中操作？ <a href="https://mathigon.org/polypad/Dnn0FwzYZTbzg">https://mathigon.org/polypad/Dnn0FwzYZTbzg</a>	
討論	通過活動你得出什麼結論呢？寫下來！	答案是不可能。
猜想	不管操作多少次都不可能實現？	
問題	能否證明你的猜想？	
小結	你能從數學的角度描述這個問題嗎？即在數學中我們研究什麼問題能解決剛才提出的謎題？	實際上改變五盞燈的狀態一定是要改變開關次數的總和為奇數次。所以不可能

## 活動 1

修改：<https://mathigon.org/polypad/vwHzucUot8qCLA>

操作之前

第1次操作之後

第2次操作之後

第3次操作之後

第4次操作之後

第5次操作之後

說明：

1. 点开开关可以改变灯的状态
2. 将每一次的灯的状态复制到表格中记录

第6次操作之後

第7次操作之後

第8次操作之後

第9次操作之後

第10次操作之後

數學閱讀--數學謎題作業紙

謎題 1：將 10 盞電燈進行編號，從 1 編到 10，把所有的開關都打開即讓所有的電燈都亮著，然後進行以下操作：把編號為 1 的倍數的電燈按反方向撥一次開關，把編號為 2 的倍數的電燈按照當前狀態向反方向再撥一次開關，然後將編號為 3 的倍數的電燈又按照反方向再撥一次開關，.....依此類推，直到 10 次. 試問：這些操作完成以後，哪些燈是關著的？

用螢光筆標示「撥一次開關」，例如，編號為

活動記錄：

	燈 1	燈 2	燈 3	燈 4	燈 5	燈 6	燈 7	燈 8	燈 9	燈 10
開始	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
第 1 次操作之後	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
第 2 次操作之後	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T
第 3 次操作之後	F	T	T	T	F	F	F	T	F	T
第 4 次操作之後	F	T	T	F	F	F	F	F	T	T
第 5 次操作之後	F	T	T	F	T	F	F	F	T	F
第 6 次操作之後	F	T	T	F	T	T	F	F	T	F
第 7 次操作之後	F	T	T	F	T	T	T	F	T	F
第 8 次操作之後	F	T	T	F	T	T	T	T	T	F
第 9 次操作之後	F	T	T	F	T	T	T	T	F	F
第 10 次操作之後	F	T	T	F	T	T	T	T	F	T
改變次數	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
結果	F	T	T	F	T	T	T	T	F	T

將原題中的燈改為 100 盞，次數改為 100 次，答案是什麼？

猜想：

證明你的猜想：

---

迷題 2：七盞燈亮著,每次改變其中四盞燈的狀態,問經過多少次可以讓燈全部關閉?能實現嗎?

---

證明你的猜想：

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

拓展閱讀：

閱讀材料 1：

每一盞燈會在輪到他的因數的時候被改變，(如 7 號燈有因數 1 跟 7，第 1 次跟第 7 次會改變)，所以每一盞燈被改變的次數就是它的編號的因數數量，一開始燈是開著的，而最後關著的燈就代表它被改變了奇數次，

所以這個題目其實就是要找 1~100 裡面有奇數個因數的數字。

怎麼判斷一個數字有幾個因數呢？

把數位寫成標準分解式(質因數分解)，也就是分解成數個質數的相乘，

如： $24=2^3 \times 3$ ,  $36=2^2 \times 3^2$ , ……

然後把每個次方數+1 相乘，就是該數的因數個數，

如：24 的因數有 $(3+1) \times (1+1)=8$  個，36 的因數有 $(2+1) \times (2+1)=9$  個，…

從一個自然數  $N$  的標準分解式  $a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot a_3^{p_3} \cdots a_n^{p_n}$ ，可知  $N$  的正因數有  $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1) \dots (p_n + 1)$  個。

已知奇數 $\times$ 奇數=奇數，而奇數 $\times$ 偶數=偶數且偶數 $\times$ 偶數=偶數，如果  $N$  的標準分解式，只要有一個質因數的次數  $p_i$  是奇數，則  $p_i+1$  是偶數，因此其正因數個數必是偶數。

所以唯有  $N$  的標準分解式的所有質因數的次數是偶數，其正因數個數才會是奇數。如果  $N$  的標準分解式的所有質因數的次數是偶數，則  $N$  是完全平方數或簡稱平方數。

閱讀材料 2：

這是不可能的。怎樣證明，辦法是把亮著的燈記成+1，把關著的燈記成-1。這樣，問題就變為 +1，+1，+1，+1，+1，+1，+1 七個數，每次開關，就是改變其中四個數的符號，看能不能經過有限次的開關，把它們全部改成-1。

現在，請你考慮一下，經過一次變動，這七個數的乘積有沒有變化？這七個數的乘積保持不變。為什麼呢？改變一個數的符號，也就是把這個數乘以-1。在一次開關中，有兩個數乘以-1，七個數的乘積經過一次變動後，應當乘以  $(-1)^2$ 。可是所以七個數的乘積經過變動，仍然保持不變。原來的七個數的乘積是+1，不管經過多少次變動，七個數的乘積始終是 +1、而七個-1的乘積是-1。所以，不可能把七個數都變成-1。

要是把這個問題裡的七改成任意一個正奇數，四改成任意一個正偶數，答案仍然是不可能。把七改成偶數呢？要是原來有偶數盞燈，那就一定能經過若干次變動，讓全部燈關滅。

另外，要是每次變動奇數個燈的開關，那不管原來燈是偶數個還是奇數個，也一定能經過若干次變動，讓全部燈關滅。

### 閱讀材料 3：

世界上最頂級的思維方式，就是要推倒思維裡的牆，打破大腦固有的認知慣性。

下面這 3 個小故事，藏著的思維模式，或許對你有所啟發。

#### 【01】令人不解的貸款者

一個猶太人走進紐約一家銀行，對貸款部經理說：“我想借些錢。”

經理問：“好啊，你要借多少？”

“1 美元。可以嗎？”

“當然可以，只要有擔保，再多點也無妨。”

猶太人從皮包裡取出一堆股票、國債等等，放在經理的寫字臺上。“總共 50 萬美元，這些擔保夠了吧？”

“當然夠了。不過，你真的只要借 1 美元嗎？”

“是的。”說著，猶太人接過了 1 美元。

“年息為 6%。只要您付出 6% 的利息，一年後歸還，我們可以把這些股票還給你。”

“謝謝。”

猶太人說完，就準備離開銀行。

一直在旁邊觀看的分行長，怎麼也弄不明白，這是怎麼回事。於是他趕緊追上前去，對猶太人說：

“啊，先生，我實在弄不清楚，你擁有 50 萬美元，為什麼只借 1 美元？要是你想借 30、40 萬美元的話，我們也會很樂意的……”

只見猶太人微笑著說：“請不必為我操心，我來貴行之前，問過了幾家銀行，他們保險箱的租金都很昂貴。

所以嘛，我就準備在貴行寄存這些股票，租金實在太便宜了，一年只需 6 美分。”

感悟：

《周易》中有句話：“易窮則變，變則通，通則久。”

生活中，任何問題都不是只有一種解決方法，當我們用固有思維解決不了的時候，就需要另闢蹊徑。

#### 【02】紀念樹

一個猶太商人看中了日本一座小島，於是投入重金，在那裡開發了一個度假村。但是由於小島名氣很小，在度假村建成以後，基本沒什麼來遊玩的人。眼看入不敷出，虧損越來越大，猶太人心生退意。

這時他的一個朋友建議他在度假村的周圍種上樹木，提高綠化覆蓋率，以此吸引遊客。這雖然是一個好辦法，可小島滿目荒涼，種樹談何容易。

後來這個猶太商人想到了一個辦法，他對外打出廣告，推出一項種植“紀念樹”的活動。

他向外界宣稱，小島專門開闢出一片土地，為廣大遊客提供特色服務。遊客可以在這裡種植紀念樹，可以是結婚紀念，也可以是家庭紀念等等。這個創意廣告很快就走紅，度假期一到，成千上萬的遊客慕名來到小島，種下屬於自己的紀念樹。不到兩年，小島上就種滿了樹。

在這個過程中，猶太商人一分錢都沒有出。還要向遊客收取 300 日元一棵樹苗的費用，光樹苗這項的收入就給他帶來了大約 600 萬日元的利潤。

感悟：

有一個成語，叫“借雞生蛋”，就是借助他人的力量，來實現自己的目標。當你陷入死胡同的時候，與其一味死磕或束手待命，不如換個角色，換個觀念。

思維方式對了，往往就會事半功倍。

### 【03】白色鵝卵石

很多年前，一個猶太商人欠了高利貸者一大筆錢。這個高利貸商人又老又醜，卻對猶太商人漂亮年輕的女兒垂涎三尺。

於是高利貸者提出一個方案，當時他們在商人的後花園裡，腳下是一條由黑白兩色鵝卵石鋪就的小路。

高利貸者彎腰撿起了兩顆鵝卵石，放進口袋，讓猶太人女兒從中取出一顆。他們約定：若她選中黑色鵝卵石，就要嫁給高利貸商人，以抵掉她父親的債務。若她選中白色鵝卵石，可以不用嫁給他，債務也一筆勾銷。

可眼尖的少女，早就發現那是兩顆完全一樣的黑色鵝卵石，她根本選不到白色的。

少女並沒有認命，她還是將手伸向了高利貸者的口袋，迅速取出一顆鵝卵石。但大家還沒來得及看到它，她就裝作不小心把它弄丟了。

地上到處都是黑白鵝卵石，根本無法分辨哪一顆是剛才掉下的。

於是少女對高利貸者說：把你口袋裡剩下那顆拿出來吧，如果是白色的，我取出的就是黑色的；如果是黑色的，我取出的自然就是白色的了。

高利貸者無奈，只好掏出剩下那顆，果然是黑色的，所以少女選擇的那一顆就只能是白色了。

於是債務一筆勾銷，少女也不必嫁給他。

感悟：

數學家卡爾·雅各布比提起自己的治學方法時，經常說的一句話是：“反過來想，總是反過來想。”

當我們無法從正面去解決問題的時候，不要忘記從反面去思考。

就像故事中的少女，丟掉了選出的那顆鵝卵石，而用剩下的那顆去決定最終結果。

學會逆向思考，打破思維的慣性，往往就能出其不意。