

“牛吃草问题”的数学模型及应用

黑龍江省五常市拉林中心學校 李雪楠

英国科学家牛顿在他的《普通算术》一书中，有一道关于牛在牧场上吃草的问题，即牛在牧场上吃草，牧场上的草在不断的、均匀的生长。后人把这类问题称为牛吃草问题或叫做“牛顿问题”。

“牛吃草”问题主要涉及三个量：草的数量、牛的头数、时间。难点在于随着时间的增长，草也在按不变的速度均匀生长，所以草的总量不定。“牛吃草”问题是小学应用题中的难点。

解“牛吃草”问题的主要依据：

- ①草的每天生长量不变；②每头牛每天的食草量不变；
- ③草的总量、草场原有的草量、新生的草量，其中草场原有的草量是一个固定值；④新生的草量、每天生长量、天数。

同一片牧场中的“牛吃草”问题，一般的解法可总结为：

- ①设定1头牛1天吃草量为“1”；
- ②草的生长速度（对应牛的头数 较多天数 对应牛的头数 较少天数）
(较多天数 较少天数)；
- ③原来的草量 对应牛的头数 吃的天数 草的生长速度 吃的天数；
- ④吃的天数 原来的草量（牛的头数 草的生长速度）；
- ⑤牛的头数 原来的草量 吃的天数 草的生长速度。

解决牛吃草问题常用到的基本公式分别为：

①草的生长速度=对应的牛头数×吃的较多天数-相应的牛头数×吃的较少天数÷(吃的较多天数-吃的较少天数)

②原有草量=牛头数×吃的天数-草的生长速度×吃的天数

③吃的天数=原有草量÷(牛头数-草的生长速度)

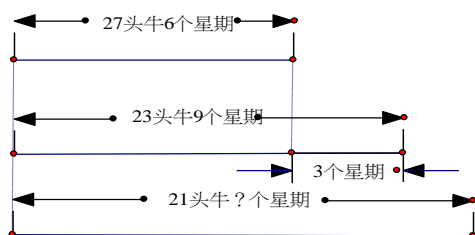
④牛头数=原有草量÷吃的天数+草的生长速度

“牛吃草”问题有很多的变例，像抽水问题、检票口检票、大坝泄洪问题等等，只有理解了“牛吃草”问题的本质和解题思路，才能以不变应万变，轻松解决此类问题。

模块一、一块地的“牛吃草问题”

【例 1】青青一牧场，牧草喂牛羊；放牛二十七，六周全吃光。改养廿三只，九周走他方；若养二十一，可作几周粮？（注：“廿”即二十之意。）

【解析】 设 1 头牛 1 天的吃草量为“1”，27 头牛吃 6 周共吃了 $27 \times 6 = 162$ 份；23 头牛吃 9 周共吃了 $23 \times 9 = 207$ 份。第二种吃法比第一种吃法多吃了 $207 - 162 = 45$ 份草，这 45 份草是牧场的草 $9 - 6 = 3$ 周生长出来的，所以每周生长的草量为 $45 \div 3 = 15$ ，那么原有草量为： $162 - 6 \times 15 = 72$ 。供 21 头牛吃，若有 15 头牛去吃每周生长的草，剩下 6 头牛需要 $72 \div 6 = 12$ 周可将原有牧草吃完，即它可供 21 头牛吃 12 周。



【巩固】牧场有一片青草，每天长势一样，已知70头牛24天把草吃完，30头牛60天把草吃完，则多少头牛96天可以把草吃完？

【解析】设1头牛1天的吃草量为“1”，那么每天新生长的草量为 $(30 \times 60 - 70 \times 24) \div (60 - 24) = \frac{10}{3}$ ，牧场原有草量为 $(30 - \frac{10}{3}) \times 60 = 1600$ ，要吃96天，需要 $1600 \div 96 + \frac{10}{3} = 20$ 头牛。

模块二、“牛吃草问题”的变形

【例2】一只船发现漏水时，已经进了一些水，水匀速进入船内.如果10人淘水，3小时淘完；如5人淘水，8小时淘完.如果要求2小时淘完，要安排多少人淘水？

【解析】设1人1小时淘出的水量是“1”，淘水速度是 $(5 \times 8 - 10 \times 3) \div (8 - 3) = 2$ ，原有水量 $(10 - 2) \times 3 = 24$ ，要求2小时淘完，要安排 $24 \div 2 + 2 = 14$ 人淘水。

【巩固】画展9时开门，但早有人来排队入场，从第一个观众来到时起，若每分钟来的观众一样多，如果开3个入场口，9时9分就不再有人排队；如果开5个入场口，9时5分就没有人排队.求第一个观众到达的时间。

【解析】如果把入场口看作为“牛”，开门前原有的观众为“原有草量”，每分钟来的观众为“草的增长速度”，那么本题就是一个“牛吃草”问题。

设每一个入场口每分钟通过“1”份人，那么4分钟来的人为 $3 \times 9 - 5 \times 5 = 2$ ，即1分钟来的人为 $2 \div 4 = 0.5$ ，原有的人为： $(3 - 0.5) \times 9 = 22.5$ 。这些人

来到画展，所用时间为 $22.5 \div 0.5 = 45$ （分）。所以第一个观众到达的时间为 8 时 15 分。

【小结】从表面上看这个问题与“牛吃草”问题相离很远，但仔细体会，题目中每分钟来的观众一样多，类似于“草的生长速度”，入场口的数量类似于“牛”的数量，问题就变成“牛吃草”问题了。解决一个问题的方法往往能解决一类问题，关键在于是否掌握了问题的实质。

学数学，首先要掌握的是数学的思想，其次要掌握数学的方法。类比就是数学中常用的数学方法，通过类比往往可以让我们看出问题的“同中之异”。在“牛吃草”问题中，抽水问题、检票口检票、掏井水问题、在运行的电梯上行走的问题等等，从叙述方式上看形式各异，但通过类比透过表象看实质，这些问题本质上都是“牛吃草”问题，均可应用上述的数学模型解题方法去思考去解答。